1. Aufgabe (Muscheln am Strand):

a)

Sarah	Solvang	Steffen	Summe
1	5	10	16
2	6	12	20
3	7	14	24

Also hat Sarah 3, Solvang 7 und Steffen 14 Muscheln gesammelt.

b)

Man sucht das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 5, das größer als 24 ist. Dieses ist 30. Da wir einen Rest von 1 haben, sind es 30 + 1 = 31 Muscheln.
Sie haben also am zweiten Tag mindestens 7 Muscheln bzw. insgesamt mindestens 31 Muscheln gesammelt.

c)

Die Lösung kann durch systematisches Probieren gefunden werden, oder aber auch durch das Aufstellen und Lösen der folgenden Gleichungen:

x ist die Gesamtmenge der Muscheln; es gilt:

$(1) x = 3y + 1$

$(2) 2y = 3z + 1$

$(3) 2z = 3a + 1$

$(4) 2a = 3b + 1$

Nun kann man diese Gleichungen von (4) ausgehend lösen:

$$a = \frac{3b+1}{2}$$

$$z = \frac{3*(\frac{3b+1}{2})+1}{2} = \frac{\frac{9b+3}{2}+1}{2} = \frac{9b+3}{4}+\frac{1}{2} = \frac{9b+5}{4}$$

$$y = \frac{3*(\frac{9b+5}{4})+1}{2} = \frac{27b+15}{8}+\frac{1}{2} = \frac{27b+19}{8}$$

$$x = 3*\frac{27b+19}{8}+1 = \frac{81b+57}{8}+1$$

$$x-1 = \frac{81b+57}{8}$$

Alle Variablen stehen für ganze Zahlen, da die Kinder nur ganze Muscheln gesammelt haben.
Folglich muss gelten:

$$81*b+57 \equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$$
$$\Leftrightarrow\ 1*b+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$$
$$\Leftrightarrow\ 1*b+1 \equiv 8(\mathrm{mod}\,8)$$
$$\Leftrightarrow\ b \equiv 7(\mathrm{mod}\,8)$$

Also ist der kleinstmögliche Wert für b die Zahl 7, und somit ist x = (81*7+57)/8+1=79.

d)
Die Lösung kann durch systematisches Probieren gefunden werden, oder aber auch durch das Aufstellen und Lösen der folgenden Gleichungen:

x ist die Gesamtmenge der Muscheln; es gilt:

$$(1)x = 4y+1$$
$$(2)3y = 4z+1$$
$$(3)3z = 4a+1$$
$$(4)3a = 4b+1$$
$$(5)3b = 4c+1$$

Nun kann man diese Gleichungen von (5) ausgehend lösen:

$$b = \frac{4c+1}{3}$$

$$a = \frac{4*\frac{4c+1}{3}+1}{3} = \frac{\frac{16c+4}{3}+1}{3} = \frac{16c+4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{16c+7}{9}$$

$$z = \frac{4*\frac{16c+7}{9}+1}{3} = \frac{64c+28}{27} + \frac{1}{3} = \frac{64c+37}{27}$$

$$y = \frac{4*\frac{64c+37}{27}+1}{3} = \frac{256c+148}{81} + \frac{1}{3} = \frac{256c+175}{81}$$

$$x = 4*\frac{256c+175}{81} + 1 = \frac{1024c+700}{81} + 1$$

$$x - 1 = \frac{1024c+700}{81}$$

Alle Variablen stehen für ganze Zahlen, da die Kinder nur ganze Muscheln gesammelt haben.
Folglich muss gelten:

$$1024*c + 700 \equiv 0(\mathrm{mod}\,81)$$

$$\Leftrightarrow\ 52*c + 52 \equiv 0(\mathrm{mod}\,81)$$

$$\Leftrightarrow\ 52*c \equiv 29(\mathrm{mod}\,81)$$

Nun ist nur noch die kleinste Zahl zu finden, deren 52faches beim Teilen durch 81 einen Rest von 29
lässt.
Die Zahl kann nun mit Hilfe einer Tabellenkalkulation bestimmt werden. Dabei lässt man in der ersten Spalte die
Zahlen von 1 bis n durchlaufen. In der 2. Spalte multipliziert man die Werte der ersten Spalte mit 52.
In Spalte 3 werden die Zahlen der 2. Spalte um 29 vermindert.
Die Werte der 3. Spalte werden nun in der 4. Spalte durch 81 geteilt. Das erste Ergebnis in der 4. Spalte, das ganzzahlig ist, ist 80. Zum Schluss bekommt jedes der vier Kinder jeweils noch einmal 80 Muscheln und die Kinder hatten insgesamt mindestens (1024*80+700)/81+1=1021 Muscheln gesammelt.

2. Aufgabe (Die Mathearbeit):

Der Durchschnitt beträgt 2,3125. Das bedeutet: 2,3125 mal eine Zahl größer als 20 muss eine ganze Zahl ergeben, nämlich die Gesamtzahl der Teilnehmer. Die ersten Zahlen, für die das der Fall ist, sind 32 und 48. Man kann davon ausgehen, dass keine Klasse 48 Schülerinnen und Schüler hat. Also können wir mit 32 weiterrechnen. Insgesamt haben demnach 32 Schüler mitgeschrieben.

Da es gleich viele Zweien und Dreien gab, die Zahl der Zweien ungerade war und es mehr als 12 Zweien gab, gab es insgesamt entweder je 13 oder 15 Schüler mit dieser Note. Wenn wir über 15 hinaus gehen würden, so müssten wir 17 Schüler mit einer Zwei und 17 mit einer Drei annehmen. Das ist nicht möglich, da wir dann insgesamt mehr als 32 Schüler hätten. Die Anzahl 15 ist aber auch nicht möglich, da dann der Durchschnitt mindestens $\frac{(2\cdot 1+2\cdot 15+3\cdot 15)}{32}=2,40625$ betragen müsste. Also gibt es 13 Zweien und 13 Dreien.

Damit kennen wir die Note von 26 Schülern. Es fehlen noch sechs. Die Summe aller Noten beträgt $32\cdot 2,3125=74$.

Davon stammen $2\cdot 13+3\cdot 13=65$ von den Zweien und Dreien. Also sind insgesamt nur 9 übrig, die auf 6 Schüler aufzuteilen sind. Daraus folgt, dass es fünf Einsen und eine Vier gab.

3. Aufgabe (Nerd in Nöten):

<u>Teil 1 (zwei Verteilungen)</u>

Verteilung 1: Julius erhält drei volle, eine halbvolle und drei leere Flaschen. Alexej erhält ebenfalls drei volle, eine halbvolle und drei leere Flaschen. Larissa erhält eine volle, fünf halbvolle und eine leere Flasche.

Verteilung 2: Julius erhält drei volle, eine halbvolle und drei leere Flaschen. Alexej erhält zwei volle, drei halbvolle und zwei leere Flaschen. Larissa erhält ebenfalls zwei volle, drei halbvolle und zwei leere Flaschen.

<u>Teil 2 (die dritte Verteilung)</u>

Es gibt keine weitere Verteilung. Jedes Kind müsste sieben Flaschen und 3,5 Flaschen Schorle erhalten. Das bedeutet: Julius kann höchstens drei volle Flaschen erhalten, sonst würde er mehr als 3,5 Flaschen Schorle erhalten. Er kann aber auch keine zwei vollen Flaschen erhalten, da ansonsten fünf volle Flaschen übrig wären. Da Alexej nicht weniger volle Flaschen als Larissa haben soll, würde er mindestens drei erhalten. Damit hätte er aber mehr als Julius. Julius kann aus ähnlichen Gründen auch nicht eine Flasche oder keine Flasche erhalten. Er muss also genau drei volle Flaschen erhalten. Also müssen vier volle Flaschen auf Alexej und Larissa aufgeteilt werden. Da Alexej nicht weniger volle Flaschen als Larissa erhalten soll, kann er nur zwei oder drei Flaschen erhalten. Wenn er nur eine oder keine hätte, dann hätte Larissa mehr volle Flaschen als er. Wenn er vier erhalten würde, so hätte er mehr als Julius. Falls er zwei volle Flaschen erhält, so muss Larissa auch zwei erhalten. Und wenn er drei erhält, so muss Larissa eine volle Flasche erhalten. Es gibt also nur zwei Möglichkeiten: Julius 3; Alexej 3; Larissa 1 und Julius 3; Alexej 2; Larissa 2.

Da jedes Kind 3,5 Flaschen Schorle erhalten muss, ergibt sich für jede der beiden oben hergeleiteten Möglichkeiten, wie viele halbvolle Flaschen zu verteilen sind. Julius hat drei volle Flaschen, muss also eine halbvolle erhalten. Alexej hat entweder drei volle oder zwei volle; muss also im ersten Fall eine halbvolle und im zweiten Fall drei halbvolle erhalten. Larissa hat entweder eine oder zwei volle, muss also fünf halbvolle bzw. drei halbvolle erhalten.

Als letztes ergibt sich aus der Anzahl der vollen und halbvollen Flaschen eindeutig, wie viele leere Flaschen jedes Kind zu bekommen hat. Jedes Kind muss nämlich insgesamt sieben Flaschen haben.

Aufgabe 4 (Maislabyrinth)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Sie schaut mit Stelzen über die Wände.
Sie findet mit dem GPS ihres Handys heraus.
Sie geht immer rechtsrum.
Sie geht immer linksrum.
Mit der Machete holzt sie den Mais ab.
…

Weitere kreative Lösungen sind möglich und durchaus gewünscht.