1. Aufgabe (Muscheln am Strand):

a)

Sarah	Solvang	Steffen	Summe
1	5	10	16
2	6	12	20
3	7	14	24

Also hat Sarah 3, Solvang 7 und Steffen 14 Muscheln gesammelt.

b)

Man sucht das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 5, das größer als 24 ist. Dieses ist 30. Da wir einen Rest von 1 haben, sind es 30 + 1 = 31 Muscheln.
Sie haben also am zweiten Tag mindestens 7 Muscheln bzw. insgesamt mindestens 31 Muscheln gesammelt.

c)

Die Lösung kann durch systematisches Probieren gefunden werden, oder aber auch durch das Aufstellen und Lösen der folgenden Gleichungen:

x ist die Gesamtmenge der Muscheln; es gilt:

$(1) x = 3y + 1$

$(2) 2y = 3z + 1$

$(3) 2z = 3a + 1$

$(4) 2a = 3b + 1$

Nun kann man diese Gleichungen von (4) ausgehend lösen:

$$a = \frac{3b+1}{2}$$

$$z = \frac{3*(\frac{3b+1}{2})+1}{2} = \frac{\frac{9b+3}{2}+1}{2} = \frac{9b+3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9b+5}{4}$$

$$y = \frac{3*(\frac{9b+5}{4})+1}{2} = \frac{27b+15}{8} + \frac{1}{2} = \frac{27b+19}{8}$$

$$x = 3*\frac{27b+19}{8} + 1 = \frac{81b+57}{8} + 1$$

$$x - 1 = \frac{81b+57}{8}$$

Alle Variablen stehen für ganze Zahlen, da die Kinder nur ganze Muscheln gesammelt haben.
Folglich muss gelten:

$$81*b + 57 \equiv 0(\text{mod } 8)$$
$$\Leftrightarrow\ 1*b + 1 \equiv 0(\text{mod } 8)$$
$$\Leftrightarrow\ 1*b + 1 \equiv 8(\text{mod } 8)$$
$$\Leftrightarrow\ b \equiv 7(\text{mod } 8)$$

Also ist der kleinstmögliche Wert für b die Zahl 7, und somit ist x = (81*7+57)/8+1=79.

d)
Die Lösung kann durch systematisches Probieren gefunden werden, oder aber auch durch das Aufstellen und Lösen der folgenden Gleichungen:

x ist die Gesamtmenge der Muscheln; es gilt:

$$(1)x = 4y + 1$$
$$(2)3y = 4z + 1$$
$$(3)3z = 4a + 1$$
$$(4)3a = 4b + 1$$
$$(5)3b = 4c + 1$$

Nun kann man diese Gleichungen von (5) ausgehend lösen:

$$b = \frac{4c+1}{3}$$

$$a = \frac{4*\frac{4c+1}{3}+1}{3} = \frac{\frac{16c+4}{3}+1}{3} = \frac{16c+4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{16c+7}{9}$$

$$z = \frac{4*\frac{16c+7}{9}+1}{3} = \frac{64c+28}{27} + \frac{1}{3} = \frac{64c+37}{27}$$

$$y = \frac{4*\frac{64c+37}{27}+1}{3} = \frac{256c+148}{81} + \frac{1}{3} = \frac{256c+175}{81}$$

$$x = 4*\frac{256c+175}{81} + 1 = \frac{1024c+700}{81} + 1$$

$$x - 1 = \frac{1024c+700}{81}$$

Alle Variablen stehen für ganze Zahlen, da die Kinder nur ganze Muscheln gesammelt haben.
Folglich muss gelten:

$$1024*c + 700 \equiv 0(\mathrm{mod}\,81)$$

$$\Leftrightarrow\ 52*c + 52 \equiv 0(\mathrm{mod}\,81)$$

$$\Leftrightarrow\ 52*c \equiv 29(\mathrm{mod}\,81)$$

Nun ist nur noch die kleinste Zahl zu finden, deren 52faches beim Teilen durch 81 einen Rest von 29
lässt.
Die Zahl kann nun mit Hilfe einer Tabellenkalkulation bestimmt werden. Dabei lässt man in der ersten Spalte die
Zahlen von 1 bis n durchlaufen. In der 2. Spalte multipliziert man die Werte der ersten Spalte mit 52.
In Spalte 3 werden die Zahlen der 2. Spalte um 29 vermindert.
Die Werte der 3. Spalte werden nun in der 4. Spalte durch 81 geteilt. Das erste Ergebnis in der 4. Spalte, das ganzzahlig ist, ist 80. Zum Schluss bekommt jedes der vier Kinder jeweils noch einmal 80 Muscheln und die Kinder hatten insgesamt mindestens (1024*80+700)/81+1=1021 Muscheln gesammelt.

e)
Die Lösung kann durch systematisches Probieren gefunden werden, oder aber auch durch das Aufstellen und Lösen der folgenden Gleichungen:

x ist die Gesamtmenge der Muscheln; es gilt:

$(1)x = 5y + 1$

$(2)4y = 5z + 1$

$(3)4z = 5a + 1$

$(4)4a = 5b + 1$

$(5)4b = 5c + 1$

$(6)4c = 5d + 1$

Nun kann man diese Gleichungen von (6) ausgehend lösen:

$$c = \frac{5d+1}{4}$$

$$b = \frac{5*\frac{5d+1}{4}+1}{4} = \frac{\frac{25d+5}{4}+1}{4} = \frac{25d+5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{25d+9}{16}$$

$$a = \frac{5*\frac{25d+9}{16}+1}{4} = \frac{125d+45}{64} + \frac{1}{4} = \frac{125d+61}{64}$$

$$z = \frac{5*\frac{125d+61}{64}+1}{4} = \frac{625d+305}{256} + \frac{1}{4} = \frac{625d+369}{256}$$

$$y = \frac{5*\frac{625d+369}{256}+1}{4} = \frac{3125d+1845}{1024} + \frac{1}{4} = \frac{3125d+2101}{1024}$$

$$x = 5*\frac{3125d+2101}{1024} + 1 = \frac{15625d+10505}{1024} + 1$$

$$x - 1 = \frac{15625d+10505}{1024}$$

Alle Variablen stehen für ganze Zahlen, da die Kinder nur ganze Muscheln gesammelt haben.
Folglich muss gelten:

$$15625*d + 10505 \equiv 0(\text{mod}\,1024)$$

$$\Leftrightarrow\ 265*d + 265 \equiv 0(\text{mod}\,1024)$$

$$\Leftrightarrow\ 265*d \equiv 759(\text{mod}\,1024)$$

Nun ist nur noch die kleinste Zahl zu finden, deren 265faches beim Teilen durch 1024 einen Rest von 759
lässt.
Die Zahl kann dann wieder mit Hilfe einer Tabellenkalkulation bestimmt werden. Das erste Ergebnis in der 4. Spalte, das ganzzahlig ist, ist 1023. Zum Schluss bekommt jedes der fünf Kinder jeweils noch einmal 1023 Muscheln und die Kinder hatten insgesamt mindestens (15625*1023+10505)/1024+1=15621 Muscheln gesammelt.

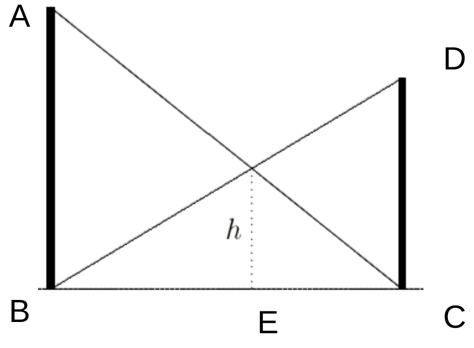
2. Aufgabe (Taschenrechnerkauf):

Der ursprüngliche Preis wird ab jetzt als *p* bezeichnet. Er wird um p% verringert. Der neue Preis von 14,76 Euro kann also mit Hilfe der Gleichung $14{,}76 = p - p \cdot \frac{p}{100}$ bestimmt werden.
Daraus ergibt sich:

$$14{,}76 = p - \frac{p^2}{100}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{p^2}{100} + p = 14{,}76$$
$$\Leftrightarrow p^2 - 100p + 1476 = 0$$
$$\Leftrightarrow p^2 - 100p + 1476 = 0$$
$$\Leftrightarrow p = 50 + \sqrt{2500 - 1476} \vee p = 50 - \sqrt{2500 - 1476}$$
$$\Leftrightarrow p = 82 \vee p = 18$$

Der ursprüngliche Preis betrug also entweder 82 Euro pro Taschenrechner oder 18 Euro. Da der Preisnachlass weniger als 50 % beträgt, kommt nur 18 Euro in Frage. Bei 18 Euro hätte sie ohne Preisnachlass 18 Euro mal 25 Stück = 450 Euro ausgegeben. Das Geld reicht nach der Preisreduzierung für (450 Euro durch 14,76 Euro ≈ 30,49) 30,49 Stück. Sie konnte also 30 Taschenrechner kaufen.

3. Aufgabe (Regalbau):



Annahme – (Modellierung) die Regalseiten AB und CD stehen senkrecht auf dem Boden BC und sind deshalb
parallel. Weiterhin sei $\overline{AB} = 1{,}8\,\text{m}$ und $\overline{DC} = 1{,}5\,\text{m}$.

Sei $x = \overline{BE}$ dann gilt nach dem 2.Strahlensatz:

$\frac{x}{h} = \frac{\overline{BC}}{1{,}5}$ (1) und

$\frac{\overline{BC} - x}{h} = \frac{\overline{BC}}{1{,}8}$. (2)

Aus (1) folgt: $h \cdot \overline{BC} = x \cdot 1{,}5 \quad (1^*)$

Aus (2) folgt: $h \cdot \overline{BC} = 1{,}8 \cdot (\overline{BC} - x)$.

Setzt man (1) = (2) so erhält man: $1{,}5x = 1{,}8 \cdot (\overline{BC} - x) \Leftrightarrow 1{,}5x = 1{,}8 \cdot \overline{BC} - 1{,}8x$

$3{,}3x = 1{,}8 \cdot \overline{BC}$, also $x = \frac{1{,}8}{3{,}3}\overline{BC} = \frac{6}{11}\overline{BC}$ (3).

Setzt man (3) in (1*) ein, so erhält man $h \cdot \overline{BC} = \frac{6}{11}\overline{BC} \cdot 1{,}5 \Leftrightarrow h = \frac{9}{11}$

Die Höhe h ist also $\frac{9}{11}$ m, also rund 0,82 m hoch.

Klara muss ihren Eltern antworten, dass sie noch schnell die Länge der Regalbretter ausmessen muss, für die Dübellochhöhe ist es allerdings egal, wie lang die Regalbretter sind.

Aufgabe 4 (Maislabyrinth)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Sie schaut mit Stelzen über die Wände.
Sie findet mit dem GPS ihres Handys heraus.
Sie geht immer rechtsrum.
Sie geht immer linksrum.
Mit der Machete holzt sie den Mais ab.
…

Weitere kreative Lösungen sind möglich und durchaus gewünscht.