1. Aufgabe (Muscheln am Strand):

a)

Sarah	Solvang	Steffen	Summe
1	5	10	16
2	6	12	20
3	7	14	24

Also hat Sarah 3, Solvang 7 und Steffen 14 Muscheln gesammelt.

b)

Man sucht das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 5, das größer als 24 ist. Dieses ist 30. Da wir einen Rest von 1 haben, sind es 30 + 1 = 31 Muscheln.
Sie haben also am zweiten Tag mindestens 7 Muscheln bzw. insgesamt mindestens 31 Muscheln gesammelt.

c)

Die Lösung kann durch systematisches Probieren gefunden werden, oder aber auch durch das Aufstellen und Lösen der folgenden Gleichungen:

x ist die Gesamtmenge der Muscheln; es gilt:

$(1) x = 3y + 1$

$(2) 2y = 3z + 1$

$(3) 2z = 3a + 1$

$(4) 2a = 3b + 1$

Nun kann man diese Gleichungen von (4) ausgehend lösen:

$$a = \frac{3b+1}{2}$$

$$z = \frac{3*(\frac{3b+1}{2})+1}{2} = \frac{\frac{9b+3}{2}+1}{2} = \frac{9b+3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9b+5}{4}$$

$$y = \frac{3*(\frac{9b+5}{4})+1}{2} = \frac{27b+15}{8} + \frac{1}{2} = \frac{27b+19}{8}$$

$$x = 3*\frac{27b+19}{8} + 1 = \frac{81b+57}{8} + 1$$

$$x - 1 = \frac{81b+57}{8}$$

Alle Variablen stehen für ganze Zahlen, da die Kinder nur ganze Muscheln gesammelt haben.
Folglich muss gelten:

$$81*b + 57 \equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$$
$$\Leftrightarrow\ 1*b + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$$
$$\Leftrightarrow\ 1*b + 1 \equiv 8(\mathrm{mod}\,8)$$
$$\Leftrightarrow\ b \equiv 7(\mathrm{mod}\,8)$$

Also ist der kleinstmögliche Wert für b die Zahl 7, und somit ist x = (81*7+57)/8+1=79.

d)
Die Lösung kann durch systematisches Probieren gefunden werden, oder aber auch durch das Aufstellen und Lösen der folgenden Gleichungen:

x ist die Gesamtmenge der Muscheln; es gilt:

$$(1)x = 4y + 1$$
$$(2)3y = 4z + 1$$
$$(3)3z = 4a + 1$$
$$(4)3a = 4b + 1$$
$$(5)3b = 4c + 1$$

Nun kann man diese Gleichungen von (5) ausgehend lösen:

$$b = \frac{4c+1}{3}$$

$$a = \frac{4*\frac{4c+1}{3}+1}{3} = \frac{\frac{16c+4}{3}+1}{3} = \frac{16c+4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{16c+7}{9}$$

$$z = \frac{4*\frac{16c+7}{9}+1}{3} = \frac{64c+28}{27} + \frac{1}{3} = \frac{64c+37}{27}$$

$$y = \frac{4*\frac{64c+37}{27}+1}{3} = \frac{256c+148}{81} + \frac{1}{3} = \frac{256c+175}{81}$$

$$x = 4*\frac{256c+175}{81} + 1 = \frac{1024c+700}{81} + 1$$

$$x - 1 = \frac{1024c+700}{81}$$

Alle Variablen stehen für ganze Zahlen, da die Kinder nur ganze Muscheln gesammelt haben.
Folglich muss gelten:

$$1024*c + 700 \equiv 0 \pmod{81}$$

$$\Leftrightarrow \; 52*c + 52 \equiv 0 \pmod{81}$$

$$\Leftrightarrow \; 52*c \equiv 29 \pmod{81}$$

Nun ist nur noch die kleinste Zahl zu finden, deren 52faches beim Teilen durch 81 einen Rest von 29
lässt.
Die Zahl kann nun mit Hilfe einer Tabellenkalkulation bestimmt werden. Dabei lässt man in der ersten Spalte die
Zahlen von 1 bis n durchlaufen. In der 2. Spalte multipliziert man die Werte der ersten Spalte mit 52.
In Spalte 3 werden die Zahlen der 2. Spalte um 29 vermindert.
Die Werte der 3. Spalte werden nun in der 4. Spalte durch 81 geteilt. Das erste Ergebnis in der 4. Spalte, das ganzzahlig ist, ist 80. Zum Schluss bekommt jedes der vier Kinder jeweils noch einmal 80 Muscheln und die Kinder hatten insgesamt mindestens (1024*80+700)/81+1=1021 Muscheln gesammelt.

e)
Die Lösung kann durch systematisches Probieren gefunden werden, oder aber auch durch das Aufstellen und Lösen der folgenden Gleichungen:

x ist die Gesamtmenge der Muscheln; es gilt:

$$(1)\, x = 5y + 1$$
$$(2)\, 4y = 5z + 1$$
$$(3)\, 4z = 5a + 1$$
$$(4)\, 4a = 5b + 1$$
$$(5)\, 4b = 5c + 1$$
$$(6)\, 4c = 5d + 1$$

Nun kann man diese Gleichungen von (6) ausgehend lösen:

$$c = \frac{5d+1}{4}$$
$$b = \frac{5*\frac{5d+1}{4}+1}{4} = \frac{\frac{25d+5}{4}+1}{4} = \frac{25d+5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{25d+9}{16}$$
$$a = \frac{5*\frac{25d+9}{16}+1}{4} = \frac{125d+45}{64} + \frac{1}{4} = \frac{125d+61}{64}$$
$$z = \frac{5*\frac{125d+61}{64}+1}{4} = \frac{625d+305}{256} + \frac{1}{4} = \frac{625d+369}{256}$$
$$y = \frac{5*\frac{625d+369}{256}+1}{4} = \frac{3125d+1845}{1024} + \frac{1}{4} = \frac{3125d+2101}{1024}$$
$$x = 5*\frac{3125d+2101}{1024} + 1 = \frac{15625d+10505}{1024} + 1$$
$$x - 1 = \frac{15625d+10505}{1024}$$

Alle Variablen stehen für ganze Zahlen, da die Kinder nur ganze Muscheln gesammelt haben.
Folglich muss gelten:

$$15625*d + 10505 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1024)$$
$$\Leftrightarrow\ 265*d + 265 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1024)$$
$$\Leftrightarrow\ 265*d \equiv 759 (\mathrm{mod}\, 1024)$$

Nun ist nur noch die kleinste Zahl zu finden, deren 265faches beim Teilen durch 1024 einen Rest von 759
lässt.
Die Zahl kann dann wieder mit Hilfe einer Tabellenkalkulation bestimmt werden. Das erste Ergebnis in der 4. Spalte, das ganzzahlig ist, ist 1023. Zum Schluss bekommt jedes der fünf Kinder jeweils noch einmal 1023 Muscheln und die Kinder hatten insgesamt mindestens (15625*1023+10505)/1024+1=15621 Muscheln gesammelt.

f)
Es sei a die Anzahl der Muscheln, die jedes Kind ganz am Ende nach dem letzten Aufteilen erhält.

Bei drei Personen gilt dann für die Mindestanzahl der gesammelten Muscheln:

$$S = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}(3a+1)+1\right)+1\right)+1$$

Verallgemeinerung: Für n Personen gilt:

$$S = \left(\frac{n}{n-1}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\cdot \dots (n\cdot a+1)+1\right)_{\dots}\right)+1$$

$$S = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n}\cdot a + \left(\frac{n}{n-1}\right)^n + \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} + \dots + 1$$

$$S = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n}\cdot a + \frac{1-\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}}{1-\frac{n}{n-1}}$$

$$S = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n}\cdot a + \frac{\frac{(n-1)^{n+1}}{(n-1)^{n+1}} - \frac{n^{n+1}}{(n-1)^{n+1}}}{\frac{-1}{n-1}}$$

$$S = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n}\cdot a - \frac{(n-1)^{n+1}-n^{n+1}}{(n-1)^{n+1}}\cdot\frac{n-1}{1}$$

$$S = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n}\cdot a - \frac{(n-1)^{n+1}-n^{n+1}}{(n-1)^n}$$

$$S = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n}\cdot a - (n-1) + \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n}$$

$$S = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n}\cdot a + \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n} - (n-1)$$

$$S = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n}\cdot (a+1) - (n-1)$$

Das kleinstmögliche a, für das S eine ganze Zahl darstellt, ist:

$$a = (n-1)^n - 1$$

Daraus folgt für S, wenn wir dieses a einsetzen

$$S = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n}\cdot (n-1)^n - (n-1)$$

$$S = n^{n+1} - (n-1)$$

2. Aufgabe (Windenergie 2.0):

Das Institut der QuiYong-Universität wird ab jetzt als A bezeichnet und das Institut der Munroe-Parc-University als B. Dann sind die folgenden Kombinationen möglich:

	A	B
Fall 1	0 Mathematiker und 6 Ingenieure	6 Mathematiker und 0 Ingenieure
Fall 2	1 M und 5 I	5 M und 1 I
Fall 3	2 M und 4 I	4 M und 2 I
Fall 4	3 M und 3 I	3 M und 3 I
Fall 5	4 M und 2 I	2 M und 4 I
Fall 6	5 M und 1 I	1 M und 5 I

Für jeden Fall kann man die Anzahl der Zusammensetzungen bestimmen:

Fall 1: $\binom{7}{6} \cdot \binom{7}{6} = 49$

Fall 2: $\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{5} \cdot \binom{7}{5} \cdot \binom{5}{1} = 11025$

Fall 3: $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{5}{2} = 122500$

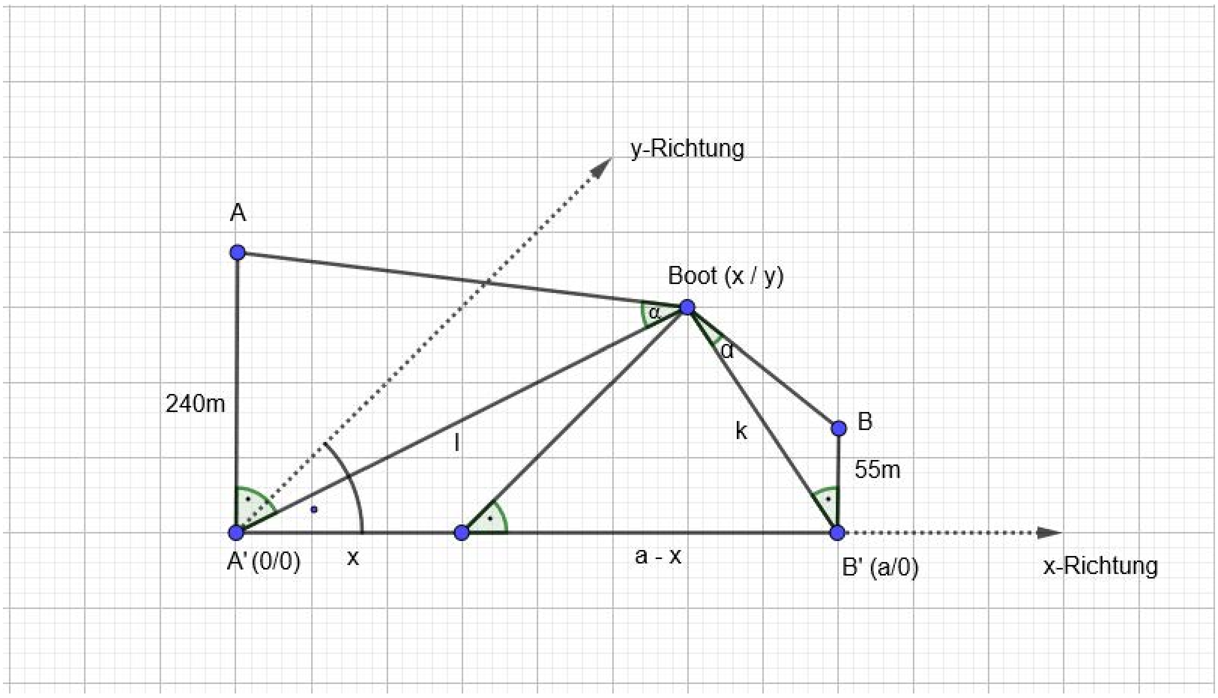
Fall 4: $\binom{5}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{3} = 122500$

Fall 5: $\binom{5}{4} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{4} = 11025$

Fall 6: $\binom{7}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{5}{5} = 49$

Damit ergeben sich insgesamt 267148 Zusammensetzungen.

3. Aufgabe (Bootsfahrt auf dem Rhein):



(Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu)

Wir betrachten die Dreiecke BootA'A und BootB'B, wobei A' der Fußpunkt des Rheinturms, B' der Fußpunkt des Riesenrades und Boot (x/y) die Position des Bootes sein sollen. Wir legen der Einfachheit halber den Fußpunkt A' in den Ursprung eines kartesisches Koordinatensystems. Da die Höhenwinkel α gleich groß sind und auch die Winkel bei A' und B' jeweils 90° betragen, sind die beiden Dreiecke ähnlich.
Daher gilt mit $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $k = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$

$$\frac{240^2}{x^2+y^2} = \frac{55^2}{(a-x)^2+y^2} \Leftrightarrow 240^2[(a-x)^2+y^2] = 55^2(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow 240^2(a^2-2ax+x^2) + 240^2y^2 = 55^2x^2 + 55^2y^2$$

$$\Leftrightarrow 240^2a^2 - 2\cdot 240^2ax + 240^2x^2 + 240^2y^2 - 55^2x^2 - 55^2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (240^2-55^2)x^2 + (240^2-55^2)y^2 - 2\cdot 240^2ax + 240^2a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 54575x^2 + 54575y^2 - 115200ax + 57600a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{4608}{2183}ax + \frac{2304}{2183}a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{4608}{2183}ax + \left(\frac{4608}{4366}a\right)^2 - \left(\frac{4608}{4366}a\right)^2 + \frac{2304}{2183}a^2 + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4608}{4366}a\right)^2 + (y-0)^2 - 0{,}0585a^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{4608}{4366}a\right)^2 + (y-0)^2 = 0{,}0585a^2$$

Das Ergebnis ist also eine Beziehung zwischen der x- und y-Koordinate der Bootposition, die einen Kreis beschreibt. Der Kreis hat den Mittelpunkt $M\left(\frac{4608}{4366}a/0\right)$ und einen Radius von
r = 0,2419a.

Das Boot müsste folglich auf einem Kreisbogen fahren, was aufgrund des natürlichen Flussverlaufes, des begrenzten Platzes und des viel befahrenen Rheins schwierig sein dürfte.

Aufgabe 4 (Maislabyrinth)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Sie schaut mit Stelzen über die Wände.
Sie findet mit dem GPS ihres Handys heraus.
Sie geht immer rechtsrum.
Sie geht immer linksrum.
Mit der Machete holzt sie den Mais ab.
…

Weitere kreative Lösungen sind möglich und durchaus gewünscht.